1146. 河口空間ノ共形幾何學 IV

岩本　秀行（東大）

III ノ訂正

(i) 相對スカラー F_1 ハ $\frac{-1}{F^2}\begin{vmatrix} F_{(M)i(M)j} & \mathring{E}_{i1} \\ \mathring{E}_{j1} & \end{vmatrix}$ トシナケレバナラナイ。

(ii) III. 定理2デ $rank(f_{ij})=n-1$ ノトキ $rank((E_M, E_M) f_{ij} - \mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM})=n-1$ トナルコトハアリ得ナイ。定理4ニツイテモ殆ンド同様デアル。

補題1. $rank(f_{ij})=n-1$ ナルトキ $rank(f_{ij}+\alpha\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM})=n-1$ ナルタメノ必要且充分條件ハ

$$1+\alpha e \neq 0 \qquad e=(E_M, E_M)$$

デアル。

證明. $$-F_1' = \begin{vmatrix} f_{ij}+\alpha\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM} & \mathring{E}_{i1} \\ \mathring{E}_{j1} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ガ $rank(f_{ij}+\alpha\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM})=n-1$ ノ必要且充分條件デアル。

$$F_1' = -\begin{vmatrix} f_{ij} & \mathring{E}_{i1} & \mathring{E}_{iM} \\ \mathring{E}_{j1} & 0 & 0 \\ -\alpha\mathring{E}_{jM} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma+\alpha e\gamma-\gamma(1+\alpha e)\neq 0$$

$$1+\alpha e \neq 0$$

從ツテ $rank(\alpha f_{ij}-\mathring{E}_{iM}, \mathring{E}_{jM})$ 或ハ $rank(f_{ij}-\frac{1}{\alpha}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM})$ ガ $n-2$ 以下トナル

$\alpha = (E_M, E_M)$ノ場合ニ限ルコトガ分ル。

以下デハスベテ $e \neq \overline{const}$ トスル。

定理1. $\lambda(x, x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(M)})$ ヲ任意ノ重サ1ノ intrinsic ナ scalar トスルトキ M+1次ノ微分方程式

$$T_i(\lambda) \equiv \mathring{E}_{iM-1} + \lambda F^{-1} \mathring{E}_{iM} = 0$$

ノ解ハ全体トシテ conformal invariant デ

$$a_{ij}\, x^{(M+1)j} + a_i = 0$$

ヲ満足スル。

証明. $\mathring{E}_{iM-1} = F^{-(M+1)}\left[\left(f_{ij} + \frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right)x^{(M+1)j} + H_i\right]$

且ツ $e \neq const$ ダカラ $\frac{M-1}{2}e + 1 \neq 0$.

従ッテ $rank\left(f_{ij} + \frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right) = n-1$

故ニ $\mathring{E}_{iM-1} = -F^{-(M+1)}\left(f_{ij} + \frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right)\left(x^{(M+1)j} + H^j\right)$

トカクコトガ出来ル。

$$rank(f_{ij}) = n-1, \quad \mathring{E}_{iM} x^{(1)i} = 0, \quad f_{ij}\, x^{(1)j} = 0$$

カラ $f_{ij}\Lambda^j = \mathring{E}_{iM}$ ナル Λ^j ヲ求メルコトガ出来ル。

且ツ $\Lambda^i \equiv g^{ij}\mathring{E}_{jM} \pmod{x^{(1)i}}$

トナル。

従ッテ $\Lambda^i \mathring{E}_{iM} = e$

$$\left(f_{ij}+\frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right)\Lambda^{j}=\mathring{E}_{iM}+\frac{M-1}{2}e$$

$$\mathring{E}_{iM}\quad=\left(1+\frac{M-1}{2}e\right)\mathring{E}_{iM}$$

$1+\frac{M-1}{2}e\neq 0$ ヨリ

$$\mathring{E}_{iM}=\left(1+\frac{M-1}{2}e\right)^{-1}\left[f_{ij}+\frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right]\Lambda^{j}$$

從ッテ

$$T_i(\lambda)\equiv\mathring{E}_{iM-1}+\lambda F^{-1}\mathring{E}_{iM}$$

$$=\left(f_{ij}+\frac{M-1}{2}\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\right)\left[x^{(M+1)j}+H^{j}+\frac{\lambda}{F}\left(1+\frac{M-1}{2}e\right)^{-1}\Lambda^{j}\right]$$

從ッテ M+1 次ノ微分方程式

$$T_i(\lambda)=0$$

ハ $\quad x^{(M+1)i}+H^{i}+\frac{\lambda}{F}\left(1+\frac{M-1}{2}e\right)^{-1}\Lambda^{i}+\rho x^{(1)i}=0$

ノ形ニカケル。

$$a_{ij}\Lambda^{j}=(ef_{ij}-\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM})\Lambda^{j}=e\mathring{E}_{iM}-e\mathring{E}_{iM}=0$$

ヨリ $a_{ij}\left[-H^{j}+\frac{\lambda}{F}\left(1+\frac{M-1}{2}e\right)^{-1}\Lambda^{i}+\rho x^{(1)i}\right)+a_{i}$

$$=-a_{ij}H^{j}+a_{i}$$

又，$\mathring{E}_{iM-1}=0$ ハ $a_{ij}x^{(M+1)j}+a_{i}=0$ ヲ滿足スル。即チ

$$\frac{\partial}{\partial x^{(M+1)k}}\begin{vmatrix}(\mathring{E}_{M},\mathring{E}_{M}) & (\mathring{E}_{M},\mathring{E}_{M-1})\\(\mathring{E}_{M},\mathring{E}_{M-1}) & (\mathring{E}_{M-1},\mathring{E}_{M-1})\end{vmatrix}$$

$$=2(\mathring{E}_{M},\mathring{E}_{M})g^{ij}\mathring{E}_{iM-1}\mathring{E}_{jM-1,(M+1)k}-2(\mathring{E}_{M},\mathring{E}_{M-1})(\mathring{E}_{M},E_{M-1})_{,(M+1)k}$$

トナルカラデアル。従ッテ

$$-a_{ij}H^j + a_i = 0$$

故ニ $\mathrm{T}_i(\lambda)=0$ ノ解ハスベテ $a_{ij}x^{(M+1)j}+a_i=0$ ノ解デアル。

$$a_{ij} \text{ハ} \quad a_{ij}x^{(1)j}=0$$

$$a_{ij}\Lambda^j=0$$

ヲ満足シ，$x^{(1)j}$，Λ^j ハ一般ニ一次独立ダカラ* $\mathrm{rank}(a_{ij})=n-2$ ナラバ** $a_{ij}x^{(M+1)j}+a_i=0$ ノ解デ Eigenschaft Γ ヲモツモノハ全部 $\mathrm{T}_i(\lambda)=0$ ノ解ナルコトガワカル。

$$F^{M+1}\mathrm{T}(\lambda)=\Big(f_{ij}+\frac{M-1}{2}\overset{\circ}{E}_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}\Big)\Big(x^{(M+1)j}+\underset{M-1}{H^j}(\lambda)\Big)$$

トスル。

$$\frac{d}{dt} \text{ヲ曲線 } x^{(M+1)j}+\underset{M-1}{H^j}(\lambda)+\rho x^{(1)j}=0$$

ニ沿フ微分トスル。

$$\frac{d}{dt}\Phi=\sum_{\lambda=0}^{M-1}\Phi_{(\lambda)i}x^{(\lambda+1)i}-\Phi_{(M)i}\underset{M-1}{H^i}(\lambda)$$

$\frac{d}{dt}\Phi$ ハ conformal invariant デナク μ ヲ適當ナ

---

* $x^{(1)j}=\sigma\Lambda^j$，ナラバ $0=f_{ij}x^{(1)j}=\sigma f_{ij}\Lambda^j=\sigma\overset{\circ}{E}_{iM}$

$\overset{\circ}{E}_{iM}\neq 0$ ヨリ $\sigma=0$ ヲ得ル。

一般ニ (a_{ij}) ノ rank ハ $n-2$ デアル。

函数トスレバ

$$\overline{\frac{d}{dt}}\Phi=\frac{d}{dt}\Phi-\mu\Phi_{(M);i}\Lambda^{i}$$

ノ如ク変換スル。Φトシテ $e\neq const$ ヲトレバ

$$\overline{\frac{d}{dt}}e=\frac{d}{dt}e-\mu e_{(M);i}\Lambda^{i}$$

$$\Lambda'=e_{(M);i}\Lambda^{i}=F^{-M}\left[(2-e)e-g^{ia}g^{jb}g^{kc}f_{ijk}\overset{\circ}{E}_{aM}\overset{\circ}{E}_{bM}\overset{\circ}{E}_{cM}\right]$$

$$f_{abc}=F^{3M-1}F_{(M)a(M)b(M)c}$$

(1) $\Lambda'\neq 0$ ノ場合

$$\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi=\frac{d}{dt}\Phi-\frac{1}{\Lambda'}\left(\frac{d}{dt}e\right)\Phi_{(M);i}\Lambda^{i}$$

$$=\frac{d}{dt}\Phi-\Lambda g^{ij}\Phi_{(M);i}\overset{\circ}{E}_{jM}$$

トスレバ

$$\overline{\frac{\widetilde{d}}{dt}}\Phi=\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi$$

デ且ツ $\frac{\widetilde{d}}{dt}$ ハ普通ノ微分ノ法則ヲ全部満足スル:

$$\frac{\widetilde{d}}{dt}(\Phi+\Psi)=\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi+\frac{\widetilde{d}}{dt}\Psi,\quad \frac{\widetilde{d}}{dt}a\Phi=a\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi$$

$$\frac{\widetilde{d}}{dt}(\Phi\Psi)=\left(\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi\right)\Psi+\Phi\left(\frac{\widetilde{d}}{dt}\Psi\right),\quad \frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi^{-1}=-\Phi^{-2}\frac{\widetilde{d}}{dt}\Phi$$

之ヲ用ヒテ第二種ノ Synge ノ Vektor

$$\widetilde{E}_{i\mu}=\sum_{\lambda=\mu}^{M}(-1)^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\frac{\widetilde{d}^{\lambda-\mu}}{dt^{\lambda-\mu}}F_{(\lambda)i}$$

ヲツクルコトが出来ル。之等ハスベテ次数Mノ共変ベクト

ルデ

$$E_{i\mu}x^{(1)i}=-\delta'_{\mu}F$$

ヲ満足スル。但シ E_{iM-1} ハ E_{iM} ニ比例スル。

之ヲ用フレバ $n\geqq 3$, $M\geqq 4$ ニ對シ

$$\begin{vmatrix} (\widetilde{E}_M,\widetilde{E}_M) & (\widetilde{E}_{M-2},\widetilde{E}_M) & \cdots\cdots & (\widetilde{E}_\mu,\widetilde{E}_M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\widetilde{E}_\mu,\widetilde{E}_M) & \cdots\cdots & \cdots\cdots & (\widetilde{E}_\mu,\widetilde{E}_\mu) \end{vmatrix}$$

ヲ用ヒテ conformal metric $\mathcal{F}$ ヲ導クコトが出来ル。

之ト微分 $\widetilde{\dfrac{d}{dt}}$ トカラ次數 M ノ範囲デ接續ヲ決定スルコトが出來ル.

(2) $\Lambda'=0$ ノ場合

$$\overline{\frac{d}{dt}e}=\frac{d}{dt}e \quad \text{カラ} \quad \mathcal{F}=\frac{d}{dt}e$$

トオケバ $\mathcal{F}$ ハ conformal metric ヲ與ヘル.

ソコデ

$$\mathcal{E}_{i\mu}=\sum_{\nu\geqq\mu}K^{\nu}_{\mu}(\mathcal{F},\mathcal{F}^{(1)},\cdots\cdots)\,b_{i\nu}$$

トオケバ

$$\Phi\,\mathcal{E}_{iM-\mu}=\binom{M}{\mu}\left[f_{ij}-\left(\mathring{E}_{iM}-\frac{M+1}{\mu+1}E'_{iM}\right)\mathring{E}_{jM}\right]x^{(M+1)j}+H_i,$$

$$\Phi\neq 0$$

$$E'_{iM}=F^{M}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_{(M)}\lambda$$

補題2. $\mathrm{rank}(f_{ij})=n-1$ ノトキ

$\mathrm{rank}(f_{ij}+V_iU_j)=n-1$. $(V_i x^{(1)i}=U_j x^{(1)j}=0)$

ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ

$$1+g^{ij}V_iU_j \neq 0$$

デアル。

証明ハ補題ノト同様デアル。

定理2. $\mathcal{E}_{iM-1}=0$

或ハ $\mathcal{E}_{iM-2}=0$

ハ Conformal invariant ナ path ノ projective class ヲ與ヘル。

$$g^{ij}\overset{\circ}{E}_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}-\frac{M+1}{n+1}g^{ij}E'_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}=1$$

同時ニ

$$g^{ij}\overset{\circ}{E}_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}-\frac{M+1}{2+1}g^{ij}E'_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}=1$$

ナラバ

$$g^{ij}E'_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}=0$$

即チ $g^{ij}\overset{\circ}{E}_{iM}\overset{\circ}{E}_{jM}=1=\text{const.}$ デ始メノ假定ト矛盾スル。之ヲ用ヒテ高々 $M+2$ 次ノ線素ノ範囲デ持續ヲ決定スルコトが出来ル。

次數乂ノ共形変換ニ對シテモ殆ンド同様デアル。